Вписанные четырёхугольники

1. **Теорема Микеля.** На сторонах AB, BC и CA отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1 и A_1BC_1 пересекаются в точке M. Докажите, что точки A_1, B_1, C и M лежат на одной окружности.
2. Точка M – середина дуги AB окружности ω. Хорды MC и MD пересекают отрезок AB в точках F и E соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CDEF$ вписанный.
3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ продолжения сторон AB и DC за точки B и C пересекаются в точке E, а продолжения сторон CB и DA за точки B и A пересекаются в точке F. Докажите, что биссектрисы углов AFB и BEC перпендикулярны друг другу.
4. Окружности Γ и Ω пересекаются в точках M и K. Через точки M и K проведены прямые AB и CD, соответственно, пересекающие Γ в точках A и C, а Ω — в точках B и D. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
5. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AC и AB в точках B_1 и C_1. Биссектрисы углов B и C пересекают прямую B_1C_1 в точках D и E соответственно. Докажите, что четырёхугольник $BCDE$ вписанный.
6. Окружность ω_1 касается окружности ω_2 в точке A_{12}, окружность ω_2 касается окружности ω_3 в точке A_{23}, окружность ω_3 касается окружности ω_4 в точке A_{34}, наконец, окружность ω_4 касается окружности ω_1 в точке A_{41}. Все указанные касания внешние. Докажите, что четырёхугольник $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$ вписанный.
7. Окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается сторон AB и BC в точках P и R соответственно. Докажите, что основание M перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AI лежит на прямой PR.

8. **Лемма Архимеда.** Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Докажите, что луч SP делит угол ASB пополам.
9. **Прямая Симсона.** Из точки X опустили перпендикуляры XA_1, XB_1 и XC_1 на три прямые BC, CA и AB соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точки X, A, B, C лежат на одной окружности.
10. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.
11. **Точка Микеля.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ продолжения сторон AB и DC за точки B и C пересекаются в точке E, а продолжения сторон CB и DA за точки B и A пересекаются в точке F. Докажите, что:
    (a) описанные окружности треугольников ABF, CDF, BCE и ADE пересекаются в одной точке (назовём её M);
    (b) центры указанных четырёх окружностей лежат на одной окружности с точкой M.
12. На прямой, содержащей сторону AC треугольника ABC, отмечены точки M и N так, что $MA = AB$, $NC = CB$ (порядок следования точек на прямой: M, C, A, N). Докажите, что центр вписанной в треугольник ABC окружности принадлежит общей хорде описанных вокруг треугольников MCB и NAB окружностей.